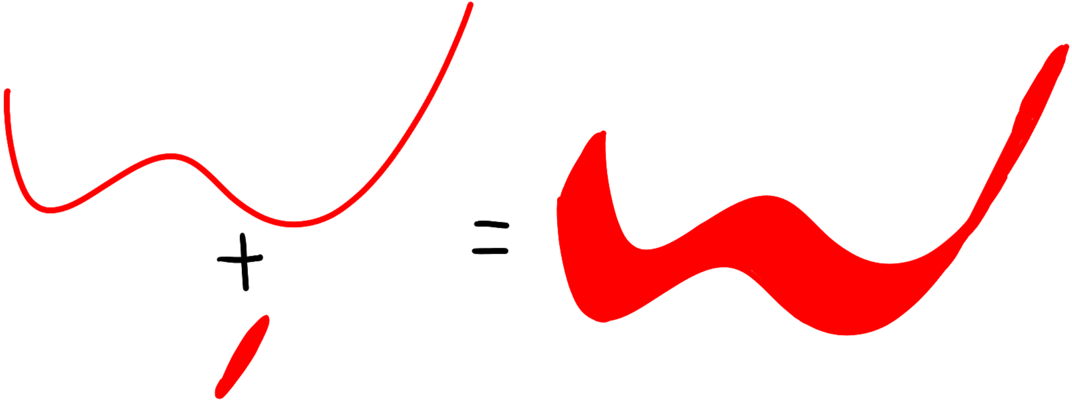
Matemática

Training Camp Medellín

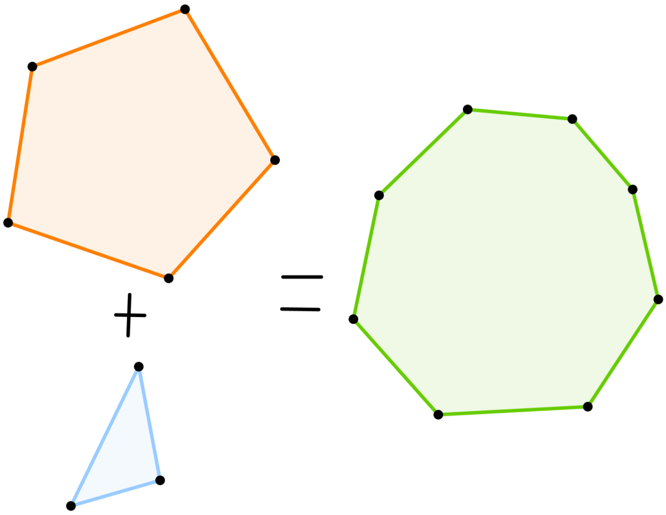
3^{ro} de Julio, 2025

Carlos Miguel Soto
Universidad de Buenos Aires

Suma de Minkowsky



Suma de Minkowsky



Dados dos polígonos convexos, decidir si se intersecan

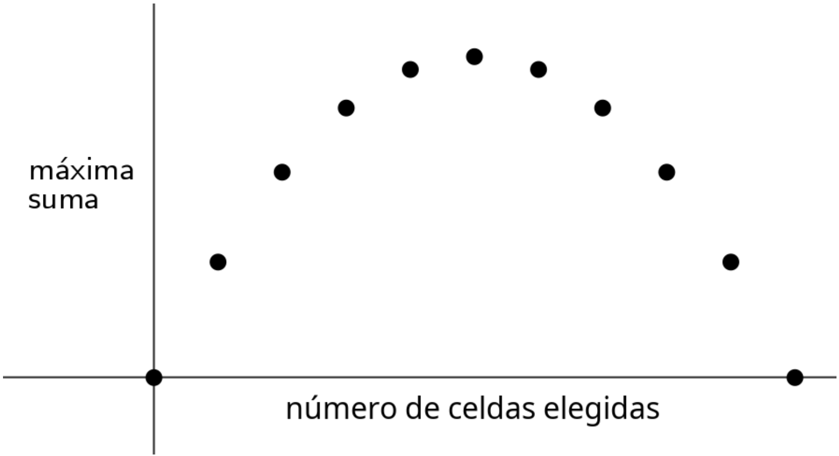
Bonus

Tenemos un arreglo de n enteros positivos, queremos seleccionar a lo sumo k elementos de forma tal que se maximice la suma.

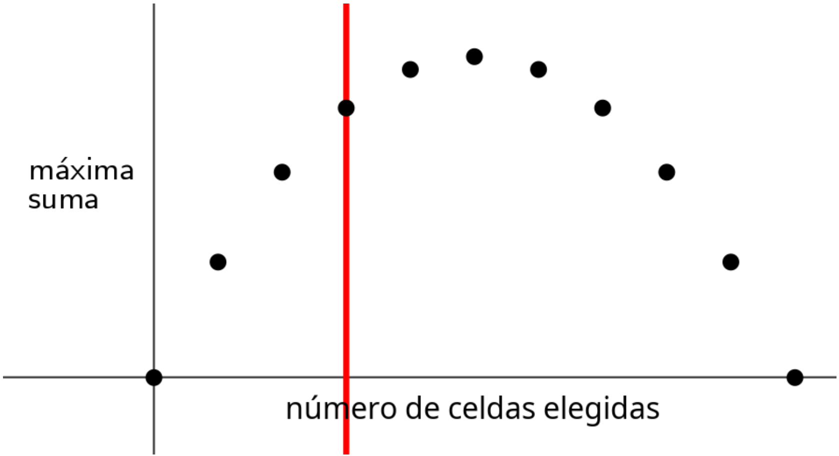
Bonus

Tenemos un arreglo de n enteros positivos, queremos seleccionar a lo sumo k elementos de forma tal que se maximice la suma. **No se permite seleccionar elementos consecutivos.**

Bonus



Bonus



Aritmética Modular

Dos enteros $a, b \in \mathbb{Z}$ son equivalentes mod m sii $m \mid b - a$

Aritmética Modular

Dos enteros $a, b \in \mathbb{Z}$ son equivalentes mod m sii $m \mid b - a$

$$a \equiv b \mod m$$

Aritmética Modular

Dos enteros $a, b \in \mathbb{Z}$ son equivalentes mod m sii $m \mid b - a$

$$a \equiv b \mod m$$

$$\mathbb{Z}_m$$

Aritmética Modular

Dos enteros $a, b \in \mathbb{Z}$ son equivalentes mod m sii $m \mid b - a$

$$a \equiv b \mod m$$

$$\mathbb{Z}_m = \{0, \ldots, m - 1\}$$

Aritmética Modular

$$a \equiv b \mod m$$

$$c \equiv d \mod m$$

$$a + c \equiv b + d \mod m$$

Aritmética Modular

$$a \equiv b \mod m$$

$$c \equiv d \mod m$$

$$a \cdot c \equiv b \cdot d \mod m$$

Aritmética Modular

$$a \equiv b \mod m$$

$$c \equiv d \mod m$$

$$a^c \equiv b^d \mod m$$

Inversos Modulares

$$5x \equiv 1 \mod m$$

Inversos Modulares

$$5x \equiv 1 \mod m$$

```
pair<int, int> euclides(int m, int n) {
    if(n == 0) return {1, 0};
    int q = m / n;
    auto [a, b] = euclides(n, m - q*n);
    return {b, a-b*q};
}
```

Inversos Modulares

$$1 \equiv 5^{\phi(m)} \equiv 5^1 \cdot 5^{\phi(m)-1} \mod m$$

Inversos Modulares

$$1 \equiv 5^{\phi(m)} \equiv 5^1 \cdot 5^{\phi(m)-1} \mod m$$

```
int fast_exp(int b, int e, int m) {
    if(e == 0) return 1;
    int r = fast_exp(b*b, e/2, m);
    if(e%2 == 1) r = r*b % m;
    return r;
}
```

Inversos Modulares

Si $a/b \in \mathbb{Z}$, entonces $a \cdot \mathrm{inv}_m(b) \equiv a/b \mod m$.

Combinatorios

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Teorema de Sunzi

$$x \equiv c_1 \mod m_1$$

$$x \equiv c_2 \mod m_2$$

Teorema de Sunzi

$$x \equiv c_1 \mod m_1$$

$$x \equiv c_2 \mod m_2$$

$$x \equiv c_r \mod m_1 m_2$$

Teorema de Sunzi

$$x \equiv c_1 \mod m_1$$
$$x \equiv c_2 \mod m_2$$

$$x \equiv c_r \mod m_1 m_2$$

$$n_1 m_1 + n_2 m_2 = 1$$
$$c_r = c_1 n_2 m_2 + c_2 n_1 m_1$$

Caso no coprimo

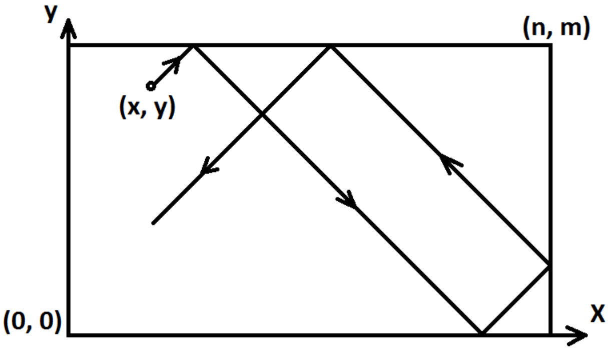
$$x \equiv c_1 \mod m_1$$
$$x \equiv c_2 \mod m_2$$

$$x \equiv c_r \mod m_1 m_2$$

$$n_1 m_1 + n_2 m_2 = \gcd(m_1, m_2)$$
$$c_r = c_1 n_2 m_2 + c_2 n_1 m_1$$

Billard

Se tiene una tabla de billard de $n \times m$. Una pelota comienza en la posición (x, y) moviéndose en la dirección $(1, 1)$



Cae en alguna esquina? Cuál?

Coloreo

Tengo un tablero de $2 \times n$. Cuántas formas hay de colorearlo con 3 colores tal que no haya dos adyacentes iguales?

n-ésimo número de fibonacci

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-1}$$

n-ésimo número de fibonacci

$$\begin{bmatrix} F_{n-1} \\ F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{n-2} \\ F_{n-1} \end{bmatrix}$$

Relación de recurrencia generalizada

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-1} + \cdots + c_k a_{n-k}$$

https://projecteuler.net/problem=258

Relación de recurrencia generalizada

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-1} + \cdots + c_k a_{n-k}$$

$$\begin{bmatrix} a_{n-k+1} \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ c_k & c_{k-1} & \cdots & c_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{n-k} \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix}$$

Módulo polinomios

$$1 - X \equiv X^3 + 1 \mod X^2 + 1$$

Polinomio Característico

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-1} + \cdots + c_k a_{n-k}$$

$$k(X) = X^k - c_1 X^{k-1} - \cdots - c_k X^0$$

Relación de recurrencia generalizada

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ c_k & c_{k-1} & \cdots & c_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X^0 \\ X^1 \\ \vdots \\ X^{k-1} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} X^1 \\ X^2 \\ \vdots \\ X^k \end{bmatrix} \mod k(X)$$

Relación de recurrencia generalizada

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ c_k & c_{k-1} & \cdots & c_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X^0 \\ X^1 \\ \vdots \\ X^{k-1} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} X^1 \\ X^2 \\ \vdots \\ X^k \end{bmatrix} \mod k(X)$$

$$X^k \equiv c_1 X^{k-1} + c_2 X^{k-2} c_2 + \cdots + c_k X^0$$

Relación de recurrencia generalizada

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ c_k & c_{k-1} & \cdots & c_1 \end{bmatrix}^n \cdot \begin{bmatrix} X^0 \\ X^1 \\ \vdots \\ X^{k-1} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} X^n \\ X^{n+1} \\ \vdots \\ X^{k-1+n} \end{bmatrix} \mod k(X)$$

Slides + Opción de Feedback

https://carlos-soto.dev/talks