

Grafos

Training Camp Medellín

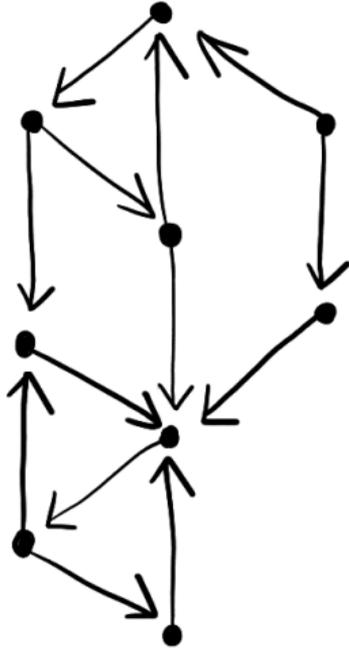
1^{ro} de Julio, 2025

Carlos Miguel Soto

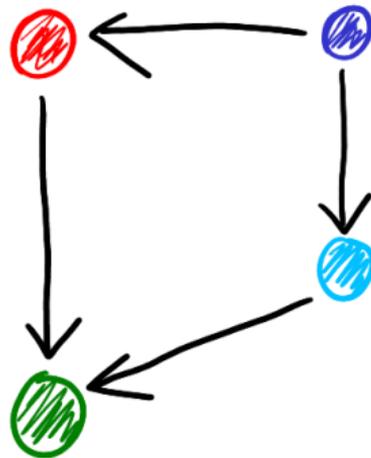
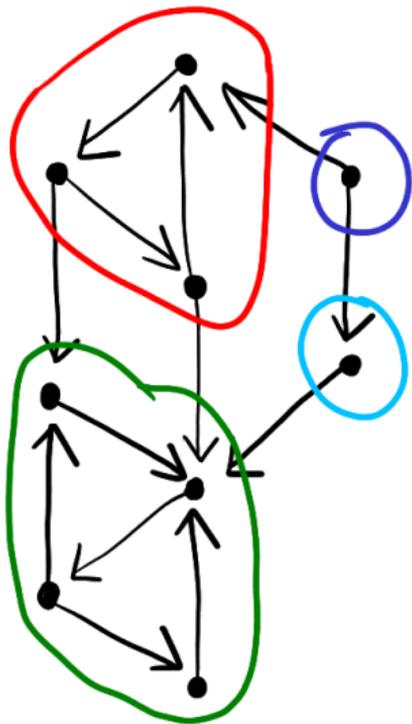
Universidad de Buenos Aires



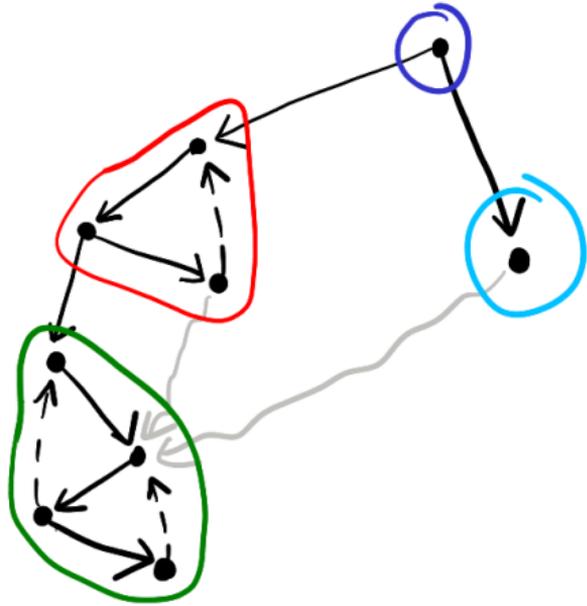
Componentes Fuertemente Conexas



Componentes Fuertemente Conexas

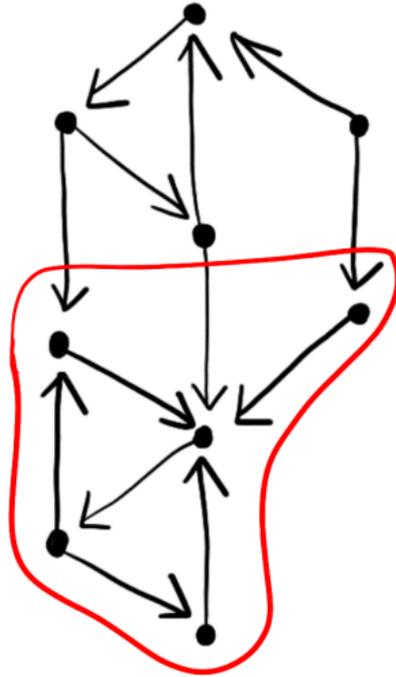


Algoritmo de Tarjan



→ tree edge
--→ back edge
~→ cross edge

Sufijo de un grafo



Ejemplo: Bombas

Tenemos un array de bombas, la i -ésima de ellas tiene potencia P_i . Si explota una bomba, todas las que estén a distancia menor o igual a P_i de ella también explotan. Para cada i , qué bombas explotan si explota la i -ésima?

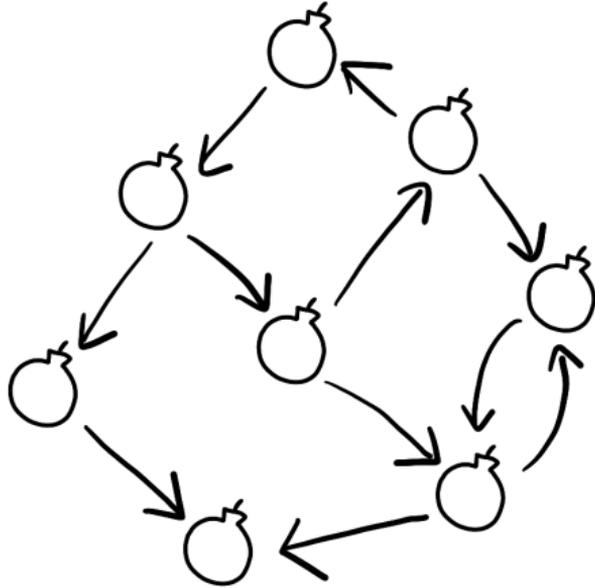


Ejemplo: Bombas

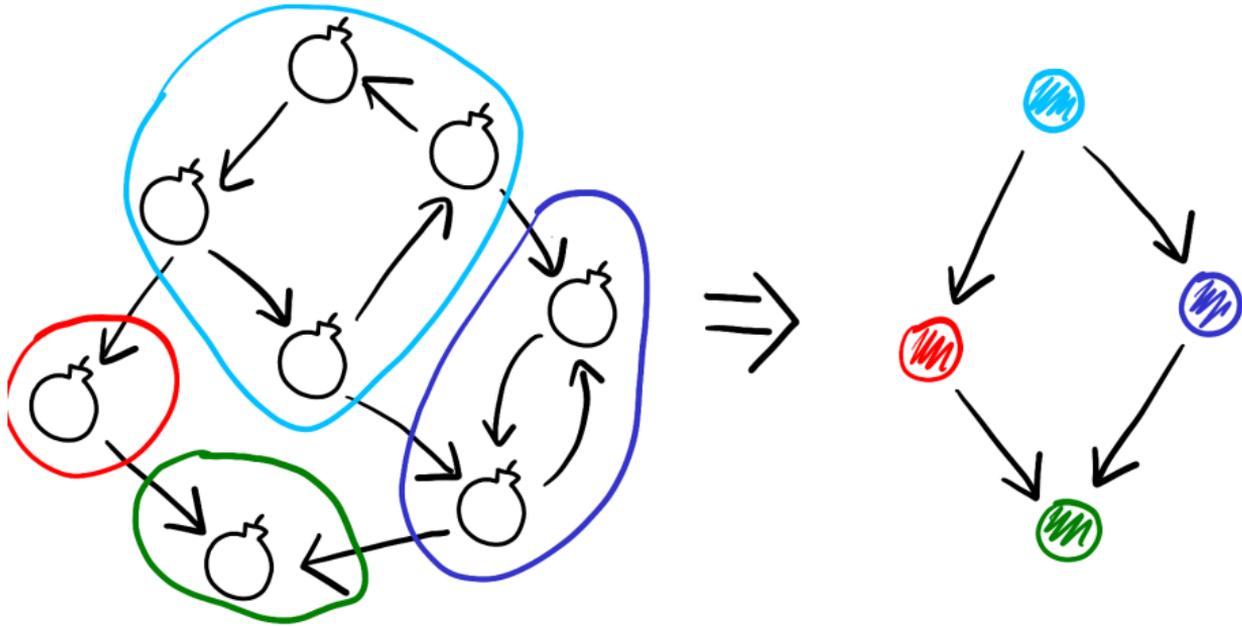
Tenemos un array de bombas, la i -ésima de ellas tiene potencia P_i . Si explota una bomba, todas las que estén a distancia menor o igual a P_i de ella también explotan. Para cada i , qué bombas explotan si explota la i -ésima?



Ejemplo: Bombas



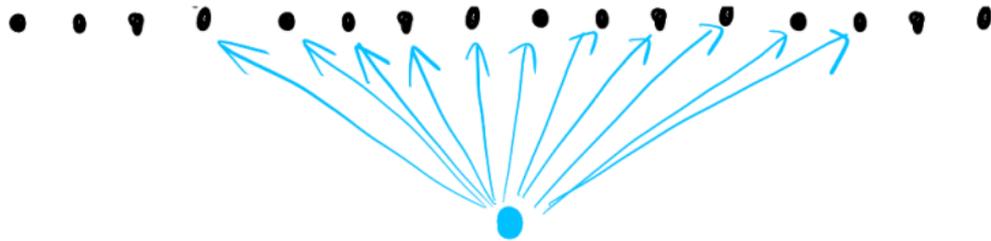
Ejemplo: Bombas



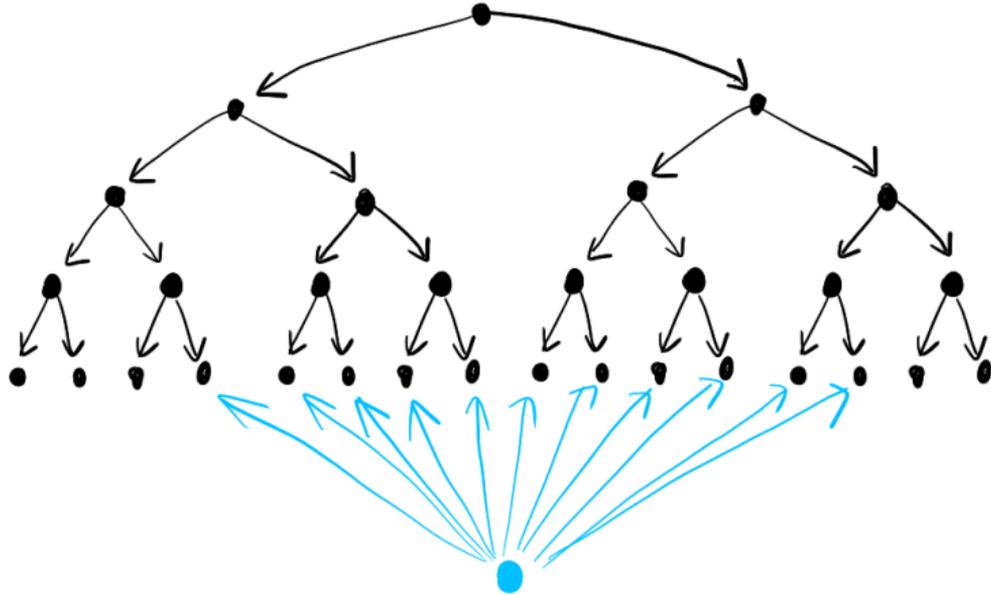
Complejidad?

Complejidad? $O(n^2)$

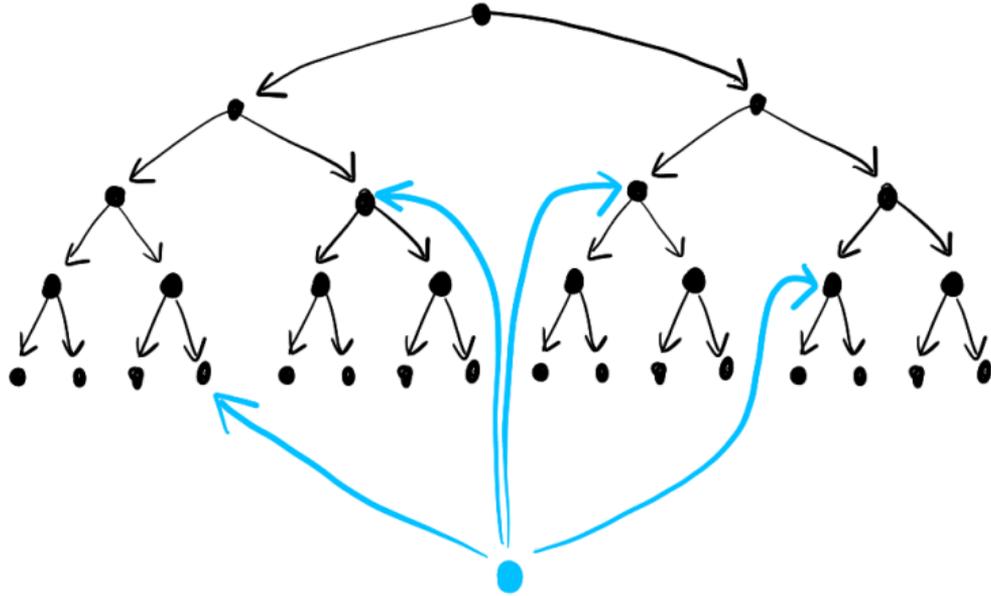
Truquito del Segment Tree



Truquito del Segment Tree



Truquito del Segment Tree



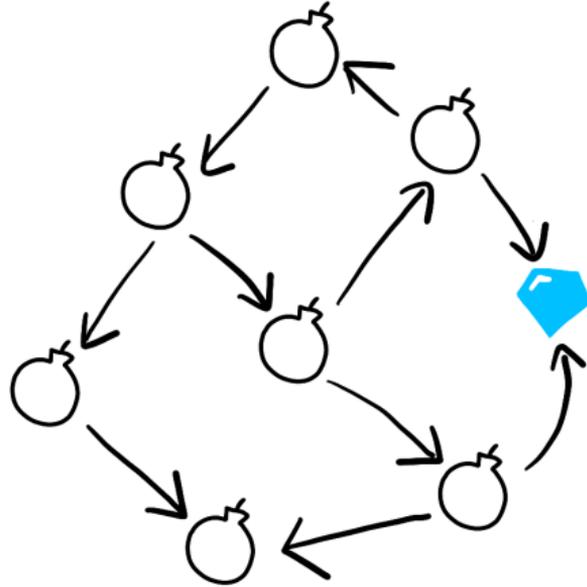
Problemas de Ejemplo

<https://robert1003.github.io/2020/02/14/graphs-and-segment-tree.html>

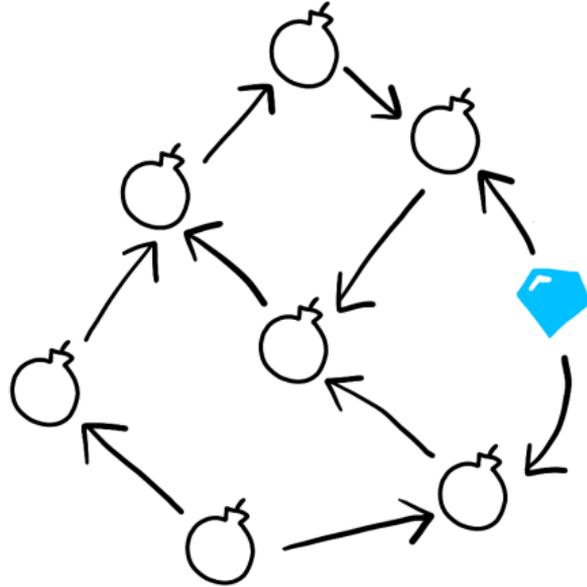
Bombas y Diamantes



Bombas y Diamantes



Bombas y Diamantes



2-SAT

$$p_1 \quad \neg p_1$$

$$p_2 \quad \neg p_2$$

$$p_3 \quad \neg p_3$$

$$\vdots$$

$$p_n \quad \neg p_n$$

2-SAT

$$A_1 \vee B_1$$

$$A_2 \vee B_2$$

$$A_3 \vee B_3$$

$$\vdots$$

$$A_m \vee B_m$$

2-SAT

Un ejemplo de sat:

$$\{\neg p_1 \vee p_2 \quad p_1 \vee \neg p_2 \quad \neg p_2 \vee \neg p_3 \quad \neg p_2 \vee p_3\}$$

2-SAT

Un ejemplo de sat:

$$\{\neg p_1 \vee p_2 \quad p_1 \vee \neg p_2 \quad \neg p_2 \vee \neg p_3 \quad \neg p_2 \vee p_3\}$$

$$p_1 = \text{false}$$

$$p_2 = \text{false}$$

$$p_3 = \text{true}$$

2-SAT

Otro ejemplo

$$\{p_1 \vee p_2 \quad \neg p_1 \vee \neg p_2 \quad p_1 \vee \neg p_2 \quad \neg p_1 \vee p_2\}$$

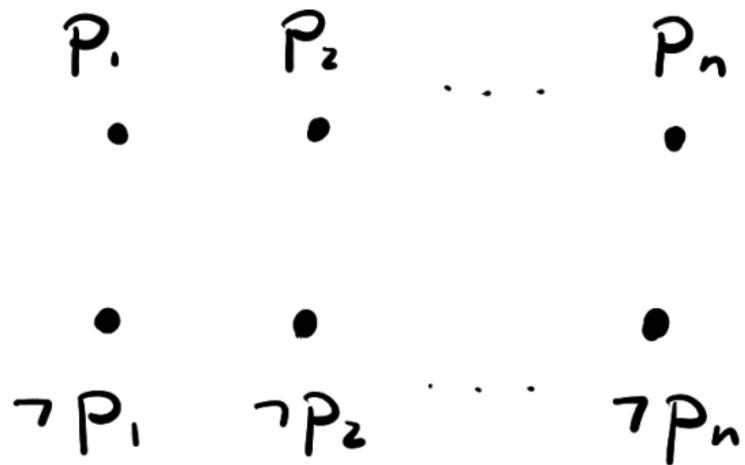
2-SAT

Otro ejemplo

$$\{p_1 \vee p_2 \quad \neg p_1 \vee \neg p_2 \quad p_1 \vee \neg p_2 \quad \neg p_1 \vee p_2\}$$

Insatisfacible!

2-SAT



2-SAT

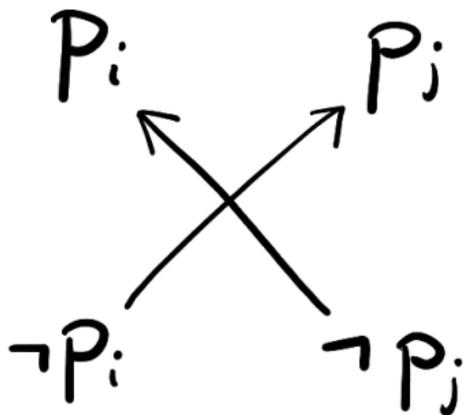
$$\neg p_i \vee p_j \quad p_i \Rightarrow p_j$$

$$p_i \longrightarrow p_j$$

$$\neg p_i \longleftarrow \neg p_j$$

2-SAT

$$p_i \vee p_j \quad \neg p_i \Rightarrow p_j$$



2-SAT

Un ejemplo de sat:

$$\{\neg p_1 \vee p_2 \quad p_1 \vee \neg p_2 \quad \neg p_2 \vee \neg p_3 \quad \neg p_2 \vee p_3\}$$

$$p_1 \quad p_2 \quad p_3$$

$$\neg p_1 \quad \neg p_2 \quad \neg p_3$$

2-SAT

Un ejemplo de sat:

$$\{\neg p_1 \vee p_2 \quad p_1 \vee \neg p_2 \quad \neg p_2 \vee \neg p_3 \quad \neg p_2 \vee p_3\}$$

$$p_1 \xrightarrow{\quad} p_2 \quad p_3$$

$$\neg p_1 \xleftarrow{\quad} \neg p_2 \quad \neg p_3$$

2-SAT

Un ejemplo de sat:

$$\{\neg p_1 \vee p_2 \quad p_1 \vee \neg p_2 \quad \neg p_2 \vee \neg p_3 \quad \neg p_2 \vee p_3\}$$

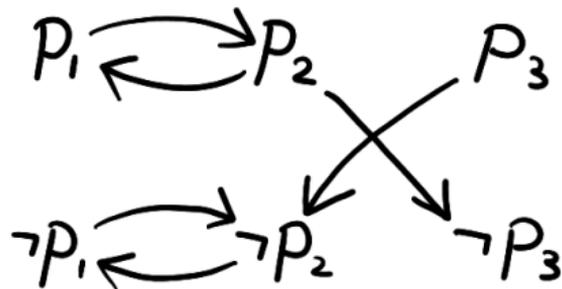
$$p_1 \rightleftarrows p_2 \quad p_3$$

$$\neg p_1 \rightleftarrows \neg p_2 \quad \neg p_3$$

2-SAT

Un ejemplo de sat:

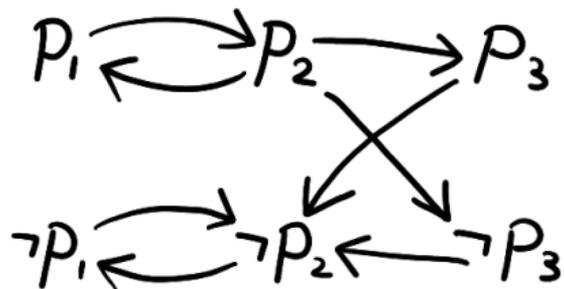
$$\{\neg p_1 \vee p_2 \quad p_1 \vee \neg p_2 \quad \neg p_2 \vee \neg p_3 \quad \neg p_2 \vee p_3\}$$



2-SAT

Un ejemplo de sat:

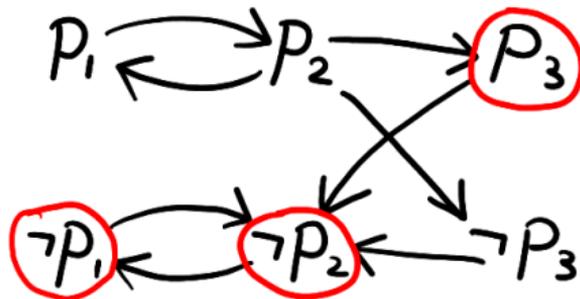
$$\{\neg p_1 \vee p_2 \quad p_1 \vee \neg p_2 \quad \neg p_2 \vee \neg p_3 \quad \neg p_2 \vee p_3\}$$



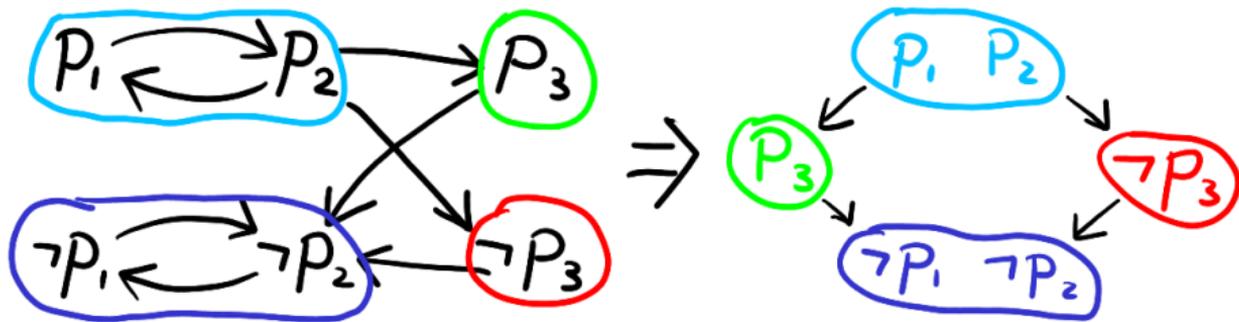
2-SAT

Un ejemplo de sat:

$$\{\neg p_1 \vee p_2 \quad p_1 \vee \neg p_2 \quad \neg p_2 \vee \neg p_3 \quad \neg p_2 \vee p_3\}$$



2-SAT



Problema Ejemplo

Se tiene una matriz de $N \times M$ de enteros. A cada casilla se le puede sumar $+1$ a lo sumo una vez. Determinar una manera de hacerlo tal que todas las casillas adyacentes sean diferentes.

1	10	9	7
3	2	2	3
8	10	15	1

Problema Ejemplo

Si $A[i] = A[j]$, agrego las restricciones:

- $p_i \vee p_j$
- $\neg p_i \vee \neg p_j$



Problema Ejemplo

Si $A[i] = A[j] + 1$, agrego la restricción:

- $p_i \vee \neg p_j$



Ejemplo 2: Radios

Se tienen n estaciones de radio, y se quiere seleccionar un subconjunto.

- Hay algunos pares de estaciones (a_i, b_i) de los que sí o sí hay que seleccionar al menos una.
- Hay algunos pares de estaciones (a_i, b_i) de los que podemos seleccionar *a lo sumo* una.

Decidir si es posible.

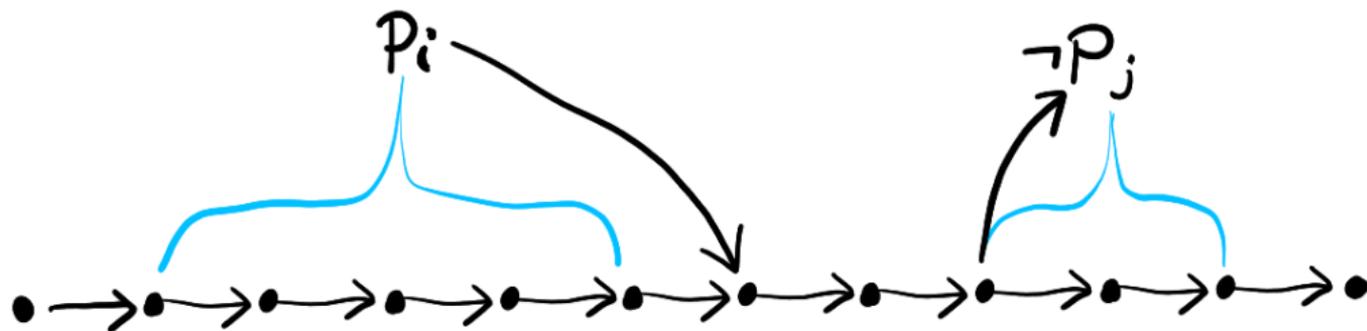
Ejemplo 3: Super radios

Se tienen n estaciones de radio, cada una con un *rango de frecuencias* $[l_i, r_i]$, y se quiere seleccionar un subconjunto.

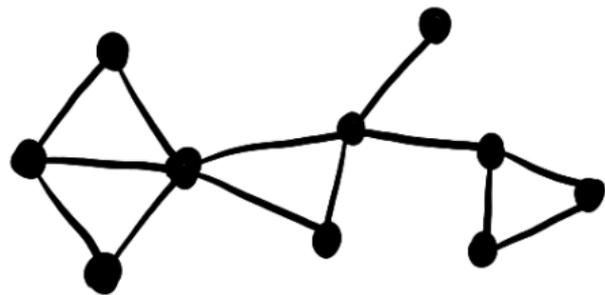
- Hay algunos pares de estaciones (a_i, b_i) de los que sí o sí hay que seleccionar al menos una.
- Hay algunos pares de estaciones (a_i, b_i) de los que podemos seleccionar *a lo sumo* una.
- Haya al menos una frecuencia compartida por todas las radios seleccionadas.

Decidir si es posible.

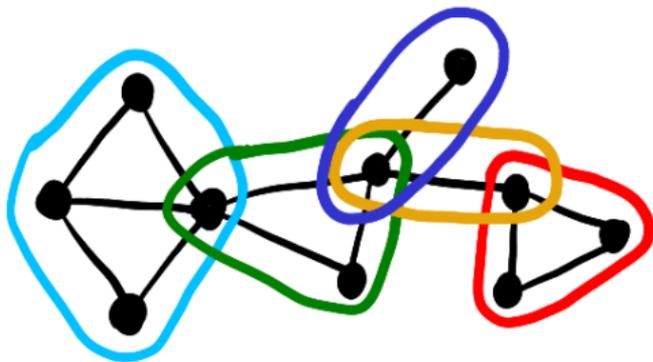
Ejemplo 3: Super radios



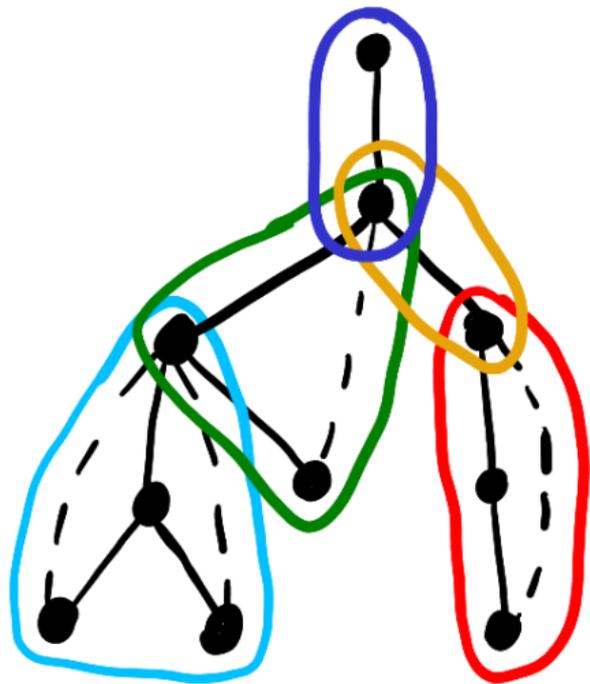
Componentes Biconexas



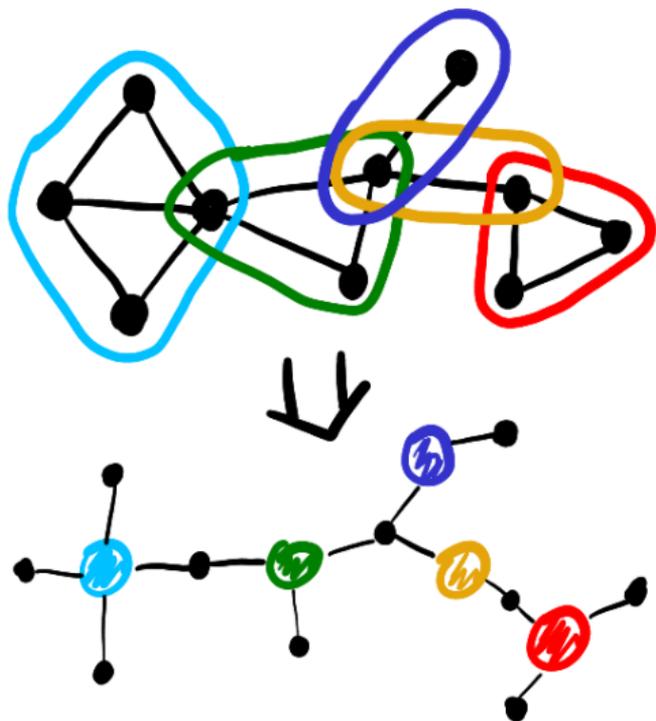
Componentes Biconexas



Tarjan



Block-cut Tree

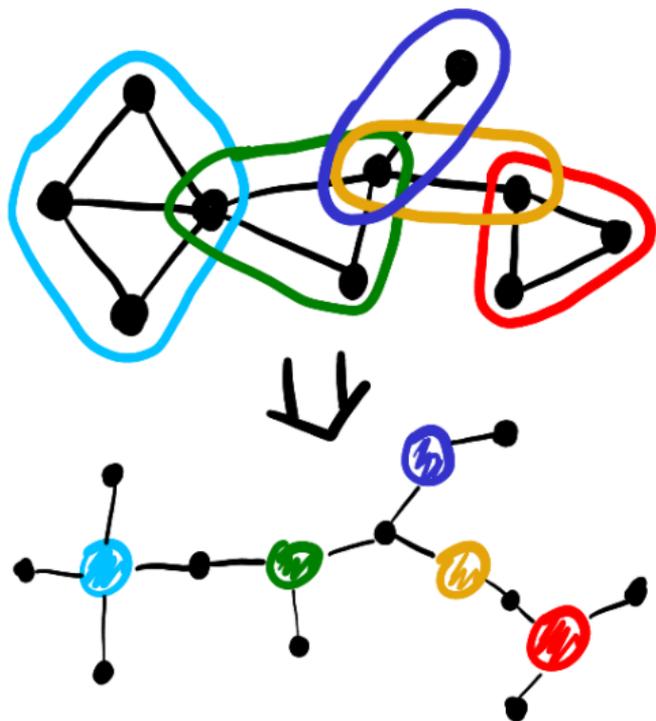


Blockade

<https://szkopul.edu.pl/problemset/problem/eDt8w290owtatmCjad000ywk/site/?key=statement>

Se tiene un grafo no dirigido y conexo. Se quiere sacar un nodo i tal que la mayor cantidad de pares posibles (u, v) de nodos quede en componentes separadas.

Blockade



Duathlon

<https://szkopul.edu.pl/problemset/problem/eDt8w290owtatmCjad0O0ywk/site/?key=statement>

Se tiene un grafo no dirigido, se quiere contar la cantidad de ternas (a, b, c) de nodos tales que hay un camino simple de a a c que pasa por b .

Duathlon

• a

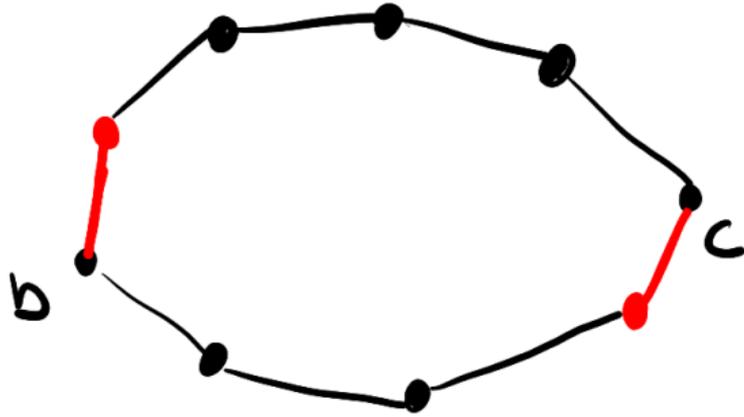
b •

• c

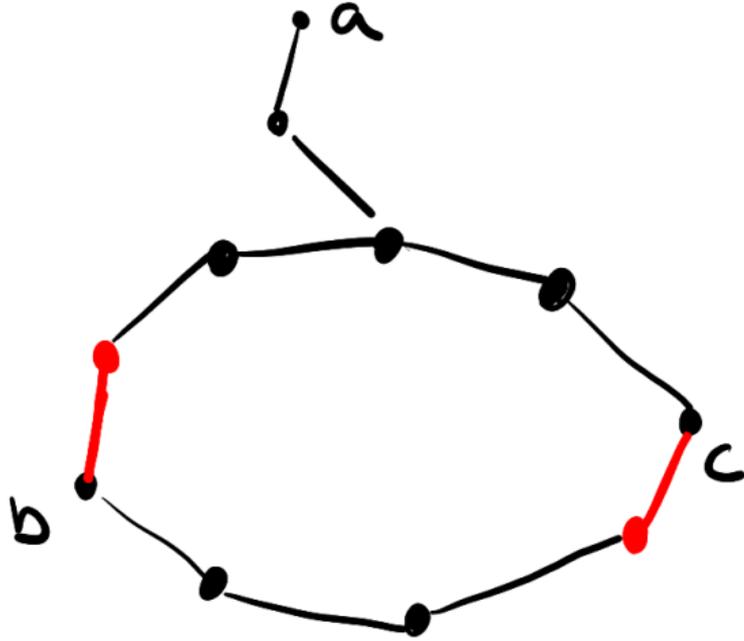
Duathlon



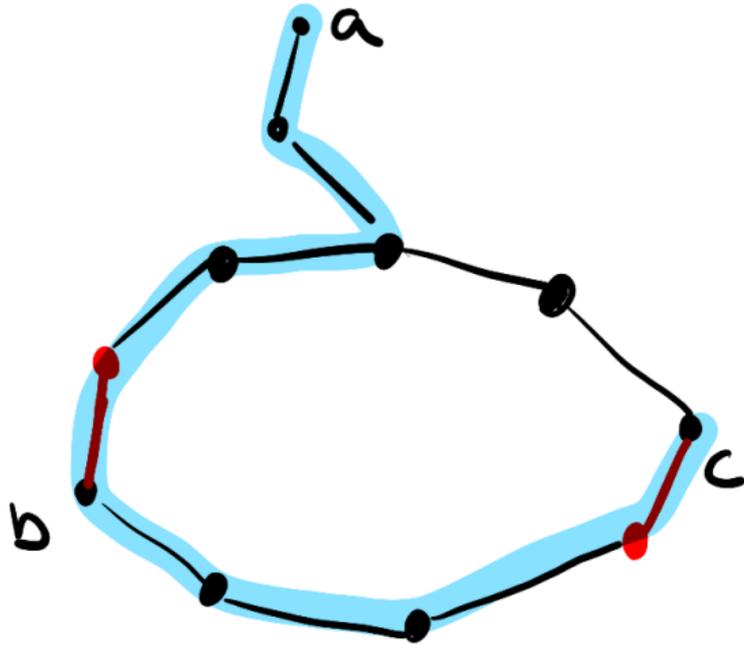
Duathlon



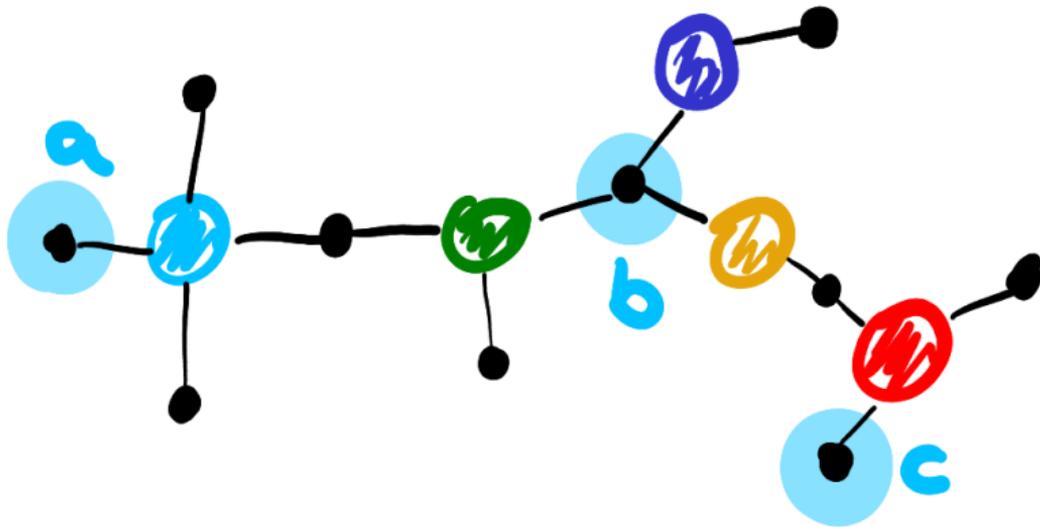
Duathlon



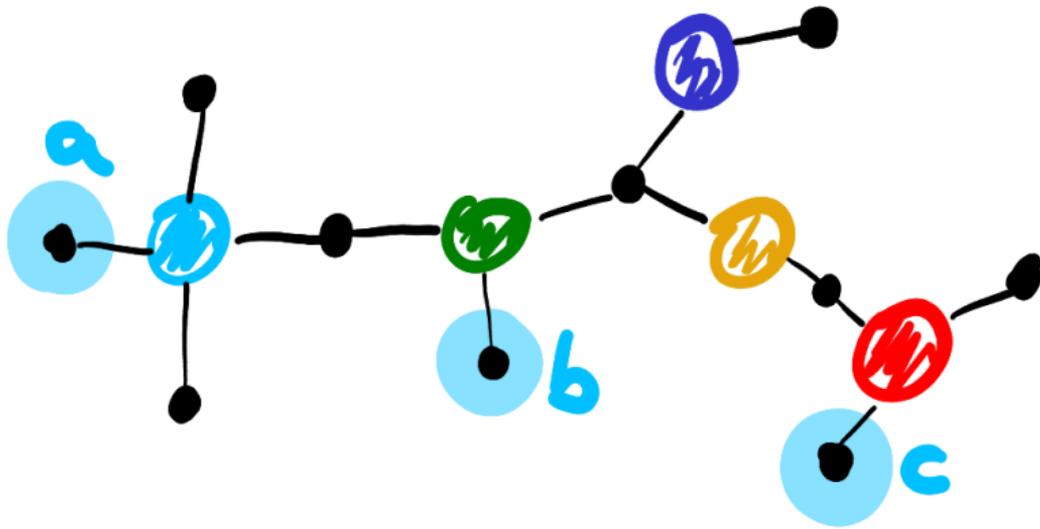
Duathlon



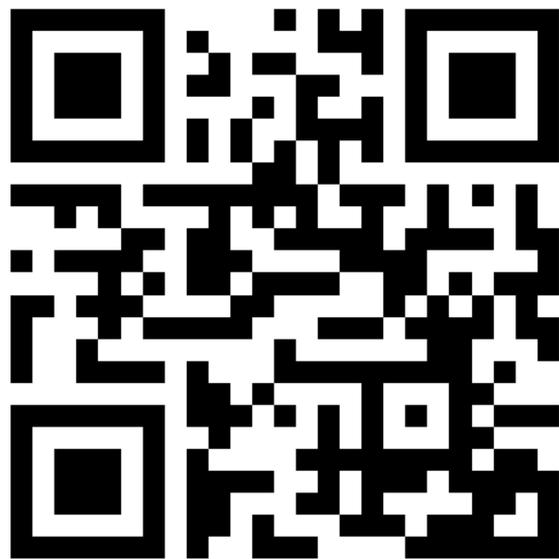
Duathlon



Duathlon



Slides + Opción de Feedback



<https://carlos-soto.dev/talks>