UBA
Universidad de Buenos Aires

Lógica y Reescritura
para Lenguajes
de Programación

Completitud Computacional de una Semántica Lineal para una Lógica Lineal

Carlos Miguel Soto

miguelsotocarlos@gmail.com

https://reedef.dev

26 Jun 2024

IMALL

IMALL

Intuitionistic
Multiplicative
Additive
Linear
Logic

$$\multimap \quad \otimes \quad \& \quad \oplus \quad 1 \quad \top \quad 0$$

Fórmulas

$$\vdash \ \lambda x.\pi_1(x) : (A \& B) \multimap A$$

Conjunción Aditiva vs Multiplicativa

$$x : A, y : B \nvdash \langle x, y\rangle : A \& B$$

$$x : A, y : B \vdash x \otimes y : A \otimes B$$

Conjunción Aditiva vs Multiplicativa

$$x : A \;\vdash\; \langle x, x \rangle : A \& A$$

$$x : A \;\nvdash\; x \otimes x : A \otimes A$$

Álgebra Lineal

Producto Tensorial

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$f(x)(y) = (x, y)$$

Producto Tensorial

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \to \mathbb{R} \otimes \mathbb{R}$$

$$f(x)(y) = x \otimes y$$

Producto Tensorial

$$f : A \to B \to C$$

$$f' : (A \otimes B) \to C$$

$$f(x)(y) = f'(x \otimes y)$$

Producto Tensorial

$$\mathbb{R} \bigotimes A = A$$

$$x \bigotimes a = x \cdot a$$

$$f : \mathbb{R} \to A \to B$$

$$f(x)(a) = x \cdot f(1)(a) = f(1)(x \cdot a)$$

Producto Cartesiano

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$f(x) = (x, x)$$

Producto Cartesiano

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \otimes \mathbb{R}$$

$$f(x) = x \otimes x$$

Semántica Denotacional

Denotación Categórica para IMALL

$$\gamma \;=\; x : A\&B \;\vdash\; \pi_1(x) : A$$

$$[\![\gamma]\!] : \mathrm{hom}([\![A\&B]\!], [\![A]\!])$$

Denotación Categórica para IMALL

$$[\![A \& B]\!] = [\![A]\!] \oplus [\![B]\!] \qquad [\![1]\!] = \mathbb{R}$$

$$[\![A \oplus B]\!] = [\![A]\!] \oplus [\![B]\!] \qquad [\![0]\!] = \{0\}$$

$$[\![A \otimes B]\!] = [\![A]\!] \otimes [\![B]\!] \qquad [\![\top]\!] = \{0\}$$

$$[\![A \multimap B]\!] = \hom([\![A]\!], [\![B]\!])$$

Contexto Más Grande

$$\gamma \;=\; x : A \multimap B,\; y : A \;\vdash\; xy : B$$

$$[\![\gamma]\!] : \mathrm{hom}([\![A \multimap B]\!] \otimes [\![A]\!], [\![B]\!])$$

Contexto Vacío

$$\gamma \;=\; \vdash \;\; * : 1$$

$$[\![\gamma]\!] : \mathrm{hom}(\mathbb{R}, [\![1]\!]) = \mathrm{hom}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

$$[\![\gamma]\!] = \mathrm{id}$$

Preguntas

- ¿Respeta reducción? (Soundness)
- ¿Colapsa exactamente los β-equivalentes? (Completeness)
- ¿Es sobreyectiva?

Espacios Vectoriales

$$k \cdot v$$

$$v_1 + v_2$$

Reglas Sintácticas

$$k \cdot t$$

$$t_1 + t_2$$

Preguntas

- **¿Es sobreyectiva?**

Preguntas

- **¿Colapsa exactamente los β-equivalentes? (Completeness)**

Caso 1

$$\vdash \; t : 1$$

$$t \longrightarrow k \cdot *$$

Equivalencia Computacional

$$\vdash\ t_1, t_2 : A \qquad x : A\ \vdash\ K : 1$$

$$t_1 \equiv t_2 \qquad K/t_1 \longleftrightarrow K/t_2$$

Demostración

$$\vdash \; t_1, t_2 : A \qquad [\![t_1]\!] = [\![t_2]\!]$$

$$[\![K/t_1]\!] = [\![K]\!] \circ [\![t_1]\!]$$

Equivalencias

β-equivalencia $\rightarrow$ misma representación categórica

misma representación categórica $\rightarrow$ equivalencia computacional

Contraejemplo

$$\vdash \; 1 \cdot \lambda x.\pi_1(x) : (1 \& 0) \multimap 1$$

$$\vdash \; 2 \cdot \lambda x.\pi_1(x) : (1 \& 0) \multimap 1$$

$$[\![\lambda x.\pi_1(x)]\!] : \mathbb{R} \oplus \{0\} \to \mathbb{R}$$

Caso sin 0 ni $\top$

$$[\![.]\!] : (\text{terminos} : A) \to [\![A]\!]$$

Demostración

$$\vdash\ t_1, t_2 : A \qquad [\![t_1]\!] \neq [\![t_2]\!]$$

$$\varphi : [\![A]\!] \to \mathbb{R} \qquad \varphi \circ t_1 \neq \varphi \circ t_2$$

$$x : A\ \vdash\ K : 1 \qquad [\![K]\!] = \varphi$$

Generalización a Semimódulos

Semianillos

$$\mathbb{R} \qquad \mathbb{C} \qquad \mathbb{Z} \qquad \mathbb{N}$$

Generalización a Semimódulos

Semimódulos Libres Finitamente Generados

$$\mathcal{S}^n$$

¿Y $\top$ y 0? (WIP)

¿Y $\top$ y 0? (WIP)

$$A \to (\llbracket A \rrbracket, V, \Phi)$$

$$V \subset \llbracket A \rrbracket \qquad \Phi \subset \hom(\llbracket A \rrbracket, \mathbb{R})$$

¿Y $\top$ y 0? (WIP)

$$0 \to (\{0\}, \{\}, \{0\})$$

$$\top \to (\{0\}, \{0\}, \{\})$$

Nueva Categoría

$$f : (A, V, \Phi) \to (A', V', \Phi')$$

$$f(V) \subset V' \qquad \Phi' \circ f \subset \Phi$$

$$f_1 = f_2 \qquad \varphi(f_1(v)) = \varphi(f_2(v))$$

Par y Or

$$V_{A\&B} = \{i_1(a) + i_2(b) : a \in V_A, b \in V_B\}$$

$$\Phi_{A\&B} = \overline{\Phi_A \circ \pi_1 \cup \Phi_B \circ \pi_2}$$

$$i_1(a) = (a, 0) \quad i_2(b) = (0, b)$$

Par y Or

$$V_{A\oplus B} = \overline{i_1(V_A) \cup i_2(V_B)}$$

$$\Phi_{A\oplus B} = \{\alpha \circ \pi_1 + \beta \circ \pi_2 : \alpha \in \Phi_A, \beta \in \Phi_B\}$$

$$i_1(a) = (a, 0) \quad i_2(b) = (0, b)$$

Espacios de Chu

$$(X, f, Y)$$

$$f : X \times Y \to K$$

Espacios de Chu

$$(A, V, \Phi) \to (V/\equiv, \mathrm{ev}, \Phi/\equiv)$$

Espacios de Chu

$$(A, V, \Phi) \to (V/\equiv, \mathrm{ev}, \Phi/\equiv)$$

reedef.dev/talks

reedef.dev/feedback